第 3 章　机构的构型解析

3.3*　机构的自由度与约束分析

前面一节讨论了建立机构自由度计算通式的可行性，并给出了一个具有普遍意义的自由度计算公式。有关这个问题的讨论由来已久，大量的文献给予了讨论，给出不同形式的表达不下几十种。应该说，鉴于机构的纷繁复杂，个性之间的差异非常大。试图给出一个放之四海而皆准的公式是十分困难的。即使有之，也很难具有实用性。例如对于式（3.2-11），一个棘手的问题是如何确定其中的各个参数值，比如冗余约束数。

另外，自由度计算公式只是一个量化的结果。对于一个机构而言，仅仅知道它的自由度数是远远不够的，了解其自由度具体分布更具有实际价值。例如，描述一个 3 自由度的空间机构，必须指出这 3 个自由度的具体性质，如 2 自由度转动加上 1 维移动或三维移动等等。因为 3 自由度有多种组合情况，必须具体指出其中一种。这个问题属于自由度分析的范畴，与自由度计算同样重要。

事实上，文献 [12，70] 等已对此类问题进行了系统的研究，有效地解决了难题。这里重点介绍机构公共约束、冗余约束和局部自由度如何确定。对机构公共约束和冗余约束的确定采用的是旋量理论（附录 **F**）。采用该理论不仅可以计算机构的自由度，还可以对机构的自由度进行定性地分析。

3.3.1　自由度与约束对偶原理

Blanding 在其专著“Exact Constraint: Machine Design Using Kinematic Principles”中，从机构自由度与约束度之间的对偶关系满足 Maxwell 公式出发，将机构的自由度与约束表示成空间线图形式，同时两者之间必须满足**轴线相交**的法则。基于此法则，可以很容易地通过自由度分析确定机构约束的分布，大家可以惊奇地发现：去掉 Blanding 法则中对线图物理含义（自由度线和约束线）的约束，并对照我们附录 **F** 中通过对线系互易积的推演结果，两者的结论是惊人的相似。图 3-e1 和图 3-e2 分别图示了受到正交约束情况下平面和空间内刚体的自由度与约束对偶关系。

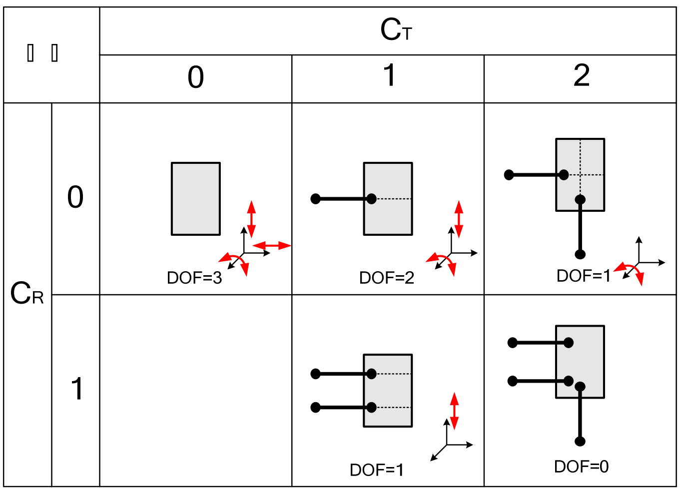


图 3-e1　平面刚体自由度与约束对偶关系图示

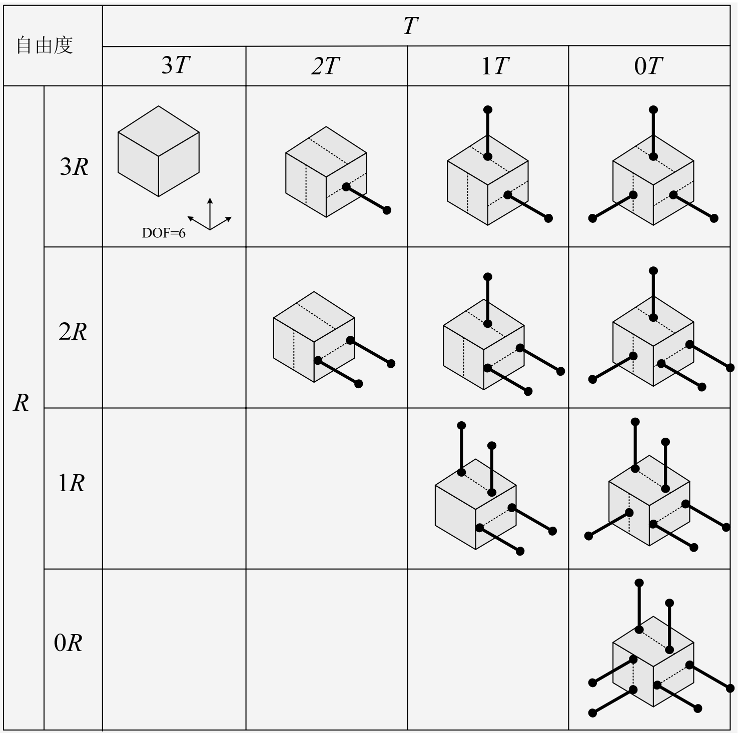


图 3-e2　空间刚体的自由度与约束对偶关系图示

3.3.2　机构过约束分析的线几何方法

1　公共约束分析

公共约束的概念可以用线几何理论来解释。将机构所有的运动副均以 Plücker 坐标来表示，并组成一个集合，进而可以找到一个 n 阶线系（其秩即为机构的阶数），若存在一个与该线系中每一个线矢量均互逆的 6-n 阶反线矢量（系），这个反线矢量（系）就是该机构的一个公共约束，公共约束数为 6-n。

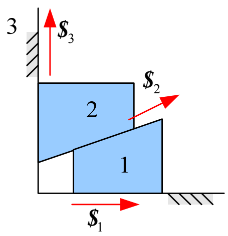


图 3-e3　斜面机构

因此，图 3-e3 所示的斜面机构中，三个移动副对应的线集为

$$\begin{cases} \$_1 = (0, 0, 0\,; 1, 0, 0) \\ \$_2 = (0, 0, 0\,; p_2, q_2, 0) \\ \$_3 = (0, 0, 0\,; 0, 1, 0) \end{cases} \tag{3.4-1}$$

可以看出上面的线集实际上是一个 2 阶线系，分布在如图 3-e4 所示的二维线空间（实为偶量空间）中。因此它的反线矢量系的阶数为 4，即机构的公共约束数为 4。

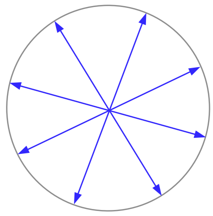
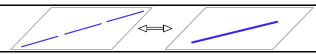
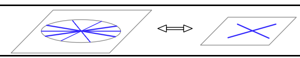
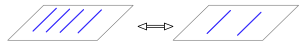


图 3-e4 二维偶量空间

2　冗余约束分析

对于平面线系，其最大维数应为 3。如果结合线矢量和偶量的物理意义，如果与刚体对应的某一线系的维数为 3，即代表该刚体受到完全约束。反之，如果发现维数小于 3 的情况即有可能受到了冗余约束的作用。而其是否真正受到冗余约束的作用还要视该刚体上总共作用的约束数而定。综合上两节的讨论，线集的维数小于 3 出现的 6 种情况如表 3-e1 所示。

表 3-e1　线集的维数小于 3（即产生冗余约束）的 6 种情况

序号	几何条件	维数	图示
1	共轴线矢量	1	
2	共轴或平偶量行	1	
3	平面汇交线矢量	2	
4	共面平线矢量行	2	
5	共轴线矢量+平面内 1 线矢量	2	
6	共轴线矢量+共轴或平行偶量	2	

下面将上述结论用于平面机构冗余约束分析中。

应该说，**特殊的几何条件是产生冗余约束的前提，但冗余约束的本质则在于构件的约束发生了奇异**。如果在约束力系与线几何之间建立一种映射，则此问题可以得到有效解决。下面以 3.2.5 给出的四种情况为例，从线空间的角度给予重新的解释。

对**第一类情况**用线几何理论解释最为简单。对于共轴或平行的移动副，由于都是偶量，因此满足表 1 中的情况 2。这时无论移动副的数目有多少，其所组成集合的维数都为 1。即都只提供一个移动约束，其余都是冗余约束。对于共轴的转动副，由于都是线矢量，因此满足表 1 中的情况 1。这时无论转动副的数目有多少，其所组成集合维数都为 1。即都只提供一个转动约束，其余都是冗余约束。而对于平面高副的讨论可以通过判断构件所受约束力的情况来间接获得。如图 3.7c 所示，构件在 *A* 和 *B* 所受的约束力都与 *nn'*重合，因此属于表 1 中的情况 1（约束力是线矢量，共轴线矢量的维数为 1）。这时所组成集合的维数为 1，即都只提供一个转动约束，其余都是冗余约束。

对**第二类情况**也可以用线几何理论解释，主要思路是通过分析机构中某一构件所受约束情况。通过约束力组成的力系所满足的几何条件来判断是否存在冗余约束，不过需要具体问题具体分析。例如，对于图 3-8a 所示的直线运动机构，观察构件 3 的受力情况如图 3-e5 所示，它受到 3 个平面汇交线矢力作用，因此满足表 1 中的情况 3。所组成的旋量系维数应为 2。因此该机构中存在 1 个冗余约束。

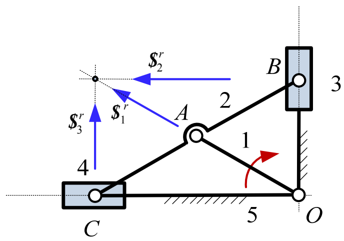


图 3-e5　椭圆仪机构的自由度分析

对**第三类情况**同样仍可以用线几何理论解释，主要思路也是通过分析机构中某一构件所受约束情况。通过约束力组成的力系所满足的几何条件来判断是否存在冗余约束。不过需要

具体问题具体分析。例如，对于图 3-9a 所示的平行杆机构，观察构件 *BEC* 的受力情况，发现它所受的约束反力始终共面平行，因此满足表 1 中的情况 4。这时所组成集合的维数为 2。即 3 个约束中只有两个起作用，有 1 个是冗余约束。实际上，这时无论平行杆的数目有多少，都只提供 2 个约束，其余都是冗余约束。

对**第四类情况**的分析相对比较复杂。结构对称可导致表 2 中的任何情况发生，需要具体问题具体分析。例如，对于图 3-10a 所示的轮系，无论太阳轮 1 还是 3，运动过程中一直受到平面共点约束力的作用，从而产生冗余约束。

3.3.3　机构过约束分析的旋量方法

线矢量是旋量的特例，同样，线几何理论完全可以通过旋量理论导出。因此，利用旋量理论解决机构过约束分析的功能会更强大一些。尤其体现在对空间机构的运动分析中。

这里将其分离出来实际上是向读者介绍两种不同解决问题的思路：一定程度上线几何方法是一种图解法；而旋量法则更像是一种解析方法。不过尽管如此，鉴于旋量方法的相对复杂，本小节只是起到一种提纲挈领的作用，并通过简单的实例来说明该方法的主要思路。例如，机构的公共约束可由该机构所有运动旋量的反旋量来确定。

【例 3-e1】：分析 Sarrut 机构（2-RRR）的自由度（如图 3-e6 所示）：每个分支中 R 副的轴线相互平行，但两个分支的运动副轴线相互垂直。

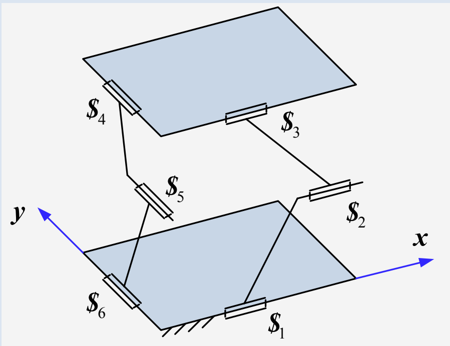


图 3-e6　Sarrus 机构

解：该机构的所有运动旋量集合表示如下：

$$\begin{cases} \$_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \$_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & q_2 & r_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \$_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & q_3 & r_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \$_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \$_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & p_5 & 0 & r_5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \$_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & p_6 & 0 & r_6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

通过互易积求取反旋量，得到

$$\$^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

因此该机构的阶数为 5，代入自由度计算公式得到

$$N=6,\quad g=6,\quad \sum_{i=1}^{g} f_i = 6,\quad d=5,\quad v=0,\quad \varsigma=0,\quad F=d(N-g-1)+\sum_{i=1}^{g} f_i + v - \varsigma = 1$$

也可以采用图谱法来分析 Sarrus 机构的自由度分布情况，具体如图 3-e7 所示。可将该机构看作一个由 2 个支链组成的并联机构，动平台（图中灰色部分）的运动可看作是 2 个支链共同运动的结果。这样，动平台的运动（自由度）可通过对两个支链末端的自由度求交得到。很显然，该机构只有 1 个 *xy* 平面法线方向（即 *z* 轴）的移动。由于机构在运动过程中，自由度特征并没有发生变化，因此该移动始终保持。

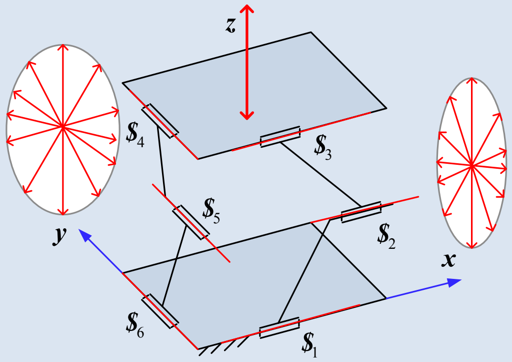
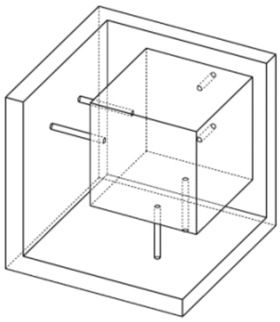


图 3-e7　图谱法分析 Sarrus 机构的自由度

3.3.4 一种用于自由度与约束分析的柔性教具

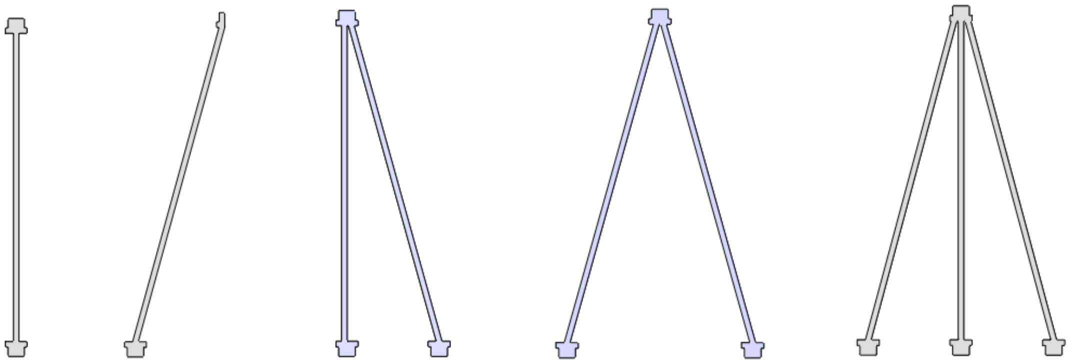
通过设计开发出一种精巧的柔性教具，将其应用到机械原理自由度与过约束分析的教学之中。具体而言，可实现如下功能：一是帮助学生直观理解自由度、约束与虚约束等概念；二是作为实物验证并演示自由度与约束之间的定性定量关系（对偶法则）。作为教学用具，该系统需具有简单紧凑，直观易用等特点。当然，如果教具还能具有类如乐高玩具那样模块化、可重构的功能，会更加有趣。

为此，借助图谱法及柔性机构的有关知识，设计了两种可能方案，具体如图 3-e8 所示。由于空间自由刚体有 3 个相互垂直的平移自由度和 3 个相互垂直的旋转自由度。很容易联想起图 3-e8a 所示的结构。正方体作为空间刚体，施加约束力与约束力偶在正方体的各平面上，垂直于平面的力可以限制与力平行方向的移动自由度，与坐标轴平行的力偶可以限制这个方向的转动自由度。用单个杆表示一维力约束，两个平行杆则提供一维力偶约束。这个结构虽然简单易懂，但是制作非常困难。为此，我们采用另外一种构型（图 3-e8b）：先假定有两个刚体，二者通过约束相连；当其中一个刚体固定时，另一刚体的自由度取决于约束的个数和形式。图 3-e9 和 3-e10 分别给出了这种教具模块模型及实物样机。


a)


b)

图 3-e8　两种教具实现方案



a) 单直杆　　b) 单斜杆　　c) 1 斜 1 直杆　　d) 2 斜杆　　e) 2 斜 1 直杆

图 3-e9　各基本杆件的具体形状

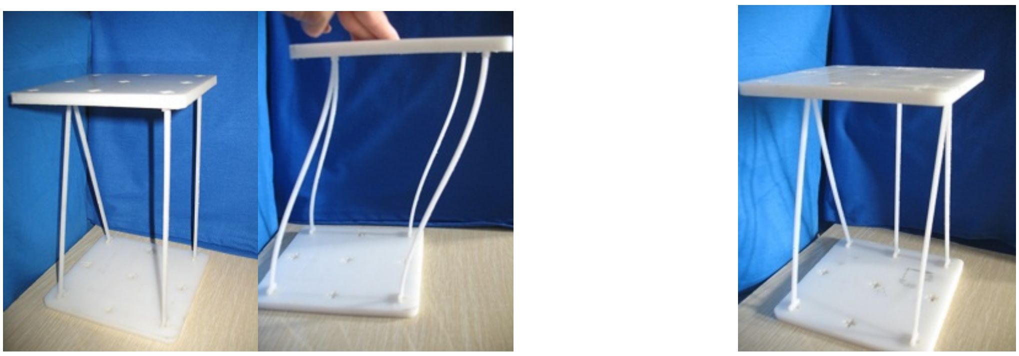


图 3-e10　样机实物图