附录 C　刚体运动的数理基础

C.8　空间刚体运动

C.8.1　空间旋转运动与旋转变换

在讨论一般刚体运动之前，先了解一下一类特殊的刚体运动——刚体的空间转动，以下简称刚体转动。

刚体转动只改变刚体的姿态，而刚体姿态可以用附着在刚体上的物体坐标系$\{B\}$相对于参考坐标系$\{A\}$的相对姿态来描述。具体用$\boldsymbol{x}_{AB}$，$\boldsymbol{y}_{AB}$，$\boldsymbol{z}_{AB}$分别表示$\{B\}$的 3 个坐标轴相对$\{A\}$的坐标，写成矩阵的形式

$$\boldsymbol{R}_{AB}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{AB} & \boldsymbol{y}_{AB} & \boldsymbol{z}_{AB}\end{bmatrix} \tag{C.8-1}$$

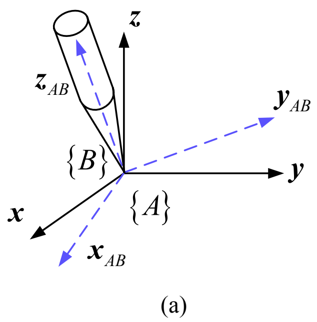
这里称$\boldsymbol{R}_{AB}$为旋转矩阵（图 C-e1）。写成一般形式为$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$和$\boldsymbol{r}_3$为其列向量表达。且

$$\boldsymbol{R}_{AB}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(x_A,x_B) & \cos(x_A,y_B) & \cos(x_A,z_B)\\ \cos(y_A,x_B) & \cos(y_A,y_B) & \cos(y_A,z_B)\\ \cos(z_A,x_B) & \cos(z_A,y_B) & \cos(z_A,z_B)\end{bmatrix} \tag{C.8-2}$$

可以看到旋转矩阵$\boldsymbol{R}$由 9 个元素组成，但实际上只有 3 个独立参数。这是因为旋转矩阵$\boldsymbol{R}$是一个**方向余弦矩阵**，同时也是一个单位正交的正定矩阵。因此，它满足如下关系式：

$$\|\boldsymbol{r}_1\|=\|\boldsymbol{r}_2\|=\|\boldsymbol{r}_3\|=1,\quad \boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_3$$

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}\text{，且}\det(\boldsymbol{R})=1 \tag{C.8-3}$$



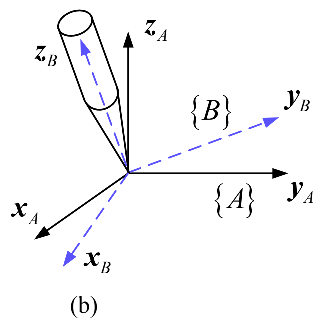


图 C-e1　旋转变换

旋转矩阵$\boldsymbol{R}$不仅可以表示刚体相对某一个坐标系下的转动（图 C-e2a），即

$$\boldsymbol{r}_P(t)=\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{r}_P(0) \tag{C.8-4}$$

也可表示同一点P在不同坐标系中的坐标变换（图 C-e2b）。即

$${}^{A}\boldsymbol{r}_P=\boldsymbol{R}_{AB}\,{}^{B}\boldsymbol{r}_P \tag{C.8-5}$$

式中，

${}^{A}\boldsymbol{r}_P$——点P在坐标系$\{A\}$中的坐标表示；

${}^{B}\boldsymbol{r}_P$——点P在坐标系$\{B\}$中的坐标表示；

$\boldsymbol{R}_{AB}$——坐标系$\{B\}$变换到坐标系$\{A\}$的旋转矩阵。

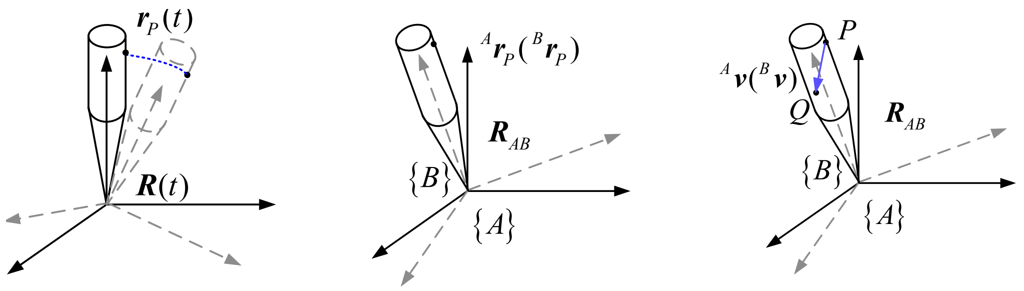
旋转矩阵$\boldsymbol{R}$也可以通过矩阵相乘加以组合形成新的旋转矩阵，即满足旋转矩阵的合成法则。

$$\boldsymbol{R}_{AC}=\boldsymbol{R}_{AB}\boldsymbol{R}_{BC} \tag{C.8-6}$$

另外，$\boldsymbol{R}$不仅可以表示点的旋转变换，还可以表示向量的旋转变换（图 C-e2c）。定义

坐标系$\{B\}$上的两点 P、Q，连接两点的向量为 ${}^B\boldsymbol{v}={}^B\boldsymbol{r}_Q-{}^B\boldsymbol{r}_P$。则

$$\boldsymbol{R}_{AB}\,{}^B\boldsymbol{v}=\boldsymbol{R}_{AB}({}^B\boldsymbol{r}_Q-{}^B\boldsymbol{r}_P)=\boldsymbol{R}_{AB}\,{}^B\boldsymbol{r}_Q-\boldsymbol{R}_{AB}\,{}^B\boldsymbol{r}_P={}^A\boldsymbol{r}_Q-{}^A\boldsymbol{r}_P={}^A\boldsymbol{v} \tag{C.8-7}$$



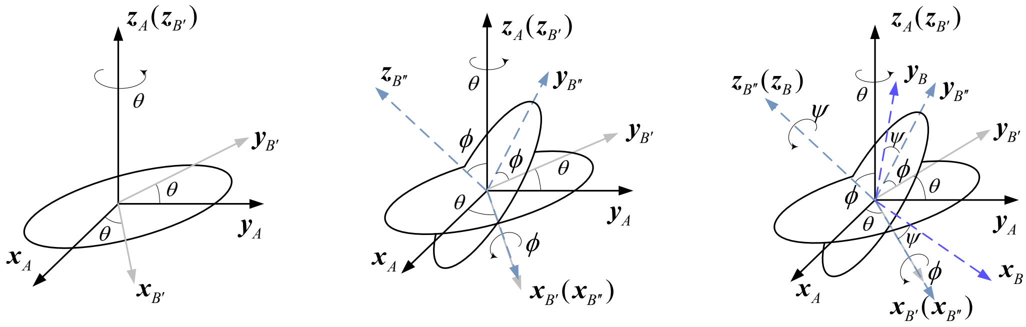
(a)　　(b)　　(c)

图 C-e2　旋转变换

空间转动通常采用欧拉角（Euler angle）来描述物体坐标系$\{B\}$相对参考坐标系$\{A\}$的姿态。具体有多种方式来描述欧拉角，如 ZXZ、ZYZ、ZYX 等。下面以其中一种为例：

- ZXZ 欧拉角：坐标系$\{B\}$最初与参考坐标系$\{A\}$重合，将$\{B\}$绕其 z 轴旋转角度θ（图 C-e3a），再绕$\{B\}$的新 x 轴旋转角度ϕ（图 C-e3b），最后再绕$\{B\}$的新 z 轴旋转角度ψ（图 C-e3c）。这样就得到了一个新的姿态 $\boldsymbol{R}_{AB}$。由于以上所有旋转变换都是相对**动坐标系**$\{B\}$来进行的，因此应遵循**矩阵右乘原则**，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{AB}&=\boldsymbol{R}(z_B,\theta)\boldsymbol{R}(x_{B'},\phi)\boldsymbol{R}(z_{B''},\psi)\\&=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi-\sin\theta\cos\phi\sin\psi & -\cos\theta\sin\psi-\sin\theta\cos\phi\cos\psi & \sin\theta\sin\phi\\ \sin\theta\cos\psi+\cos\theta\cos\phi\sin\psi & -\sin\theta\sin\psi+\cos\theta\cos\phi\cos\psi & -\cos\theta\sin\phi\\ \sin\phi\sin\psi & \sin\phi\cos\psi & \cos\phi\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{C.8-8}$$



a)　　b)　　c)

图 C-e3　ZXZ 变换

除了欧拉角外，还可采用 RPY（Roll, Pitch, Yaw——翻滚、俯仰、偏航）来描述三维转动。事实上，RPY 角源于对船舶在海中航行时的姿态描述方式。与欧拉角采用动轴旋转不同，RPY 角采用的是基于固定坐标轴的旋转。具体描述如下：

- RPY 角：坐标系$\{B\}$最初与参考坐标系$\{A\}$重合，首先绕$\{A\}$的 x 轴旋转角度α，再绕$\{A\}$的 y 轴旋转角度β，最后再绕$\{A\}$的 z 轴旋转角度γ。这样也可得到一个新的姿态 $\boldsymbol{R}_{AB}$。由于以上所有旋转变换都是相对固定坐标系来进行的，因此应遵循**矩阵左乘原则**，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{AB}(\alpha,\beta,\gamma)&=\boldsymbol{R}(z_A,\gamma)\boldsymbol{R}(y_A,\beta)\boldsymbol{R}(x_A,\alpha)\\&=\begin{bmatrix}\cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\\ \cos\beta\sin\gamma & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma\\ -\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{C.8-9}$$

除了用欧拉角等方法来描述刚体旋转运动外，还有更简单的表达形式。

【**Euler 定理**】：任一旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 都可以等效成绕某一固定轴旋转一定的角度。

如图 C-e4 所示，设$\boldsymbol{\omega}$是表示旋转轴方向的单位向量，θ为旋转角度。对于刚体的每一个旋转运动，都有一个旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 与之对应，因此，可将 $\boldsymbol{R}$ 写成$\boldsymbol{\omega}$和θ的函数。

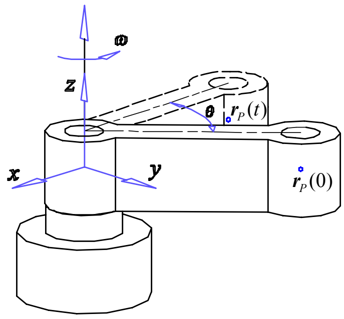


图 C-e4 刚体绕定轴旋转

在转动刚体上取任意一点 P，如果刚体以单位角速度绕轴作匀速转动，根据式（C.8-16），点 P 的速度 $\boldsymbol{v}_P$ 可以表示为

$$\boldsymbol{v}_P(\theta) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_P(\theta) = \hat{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{r}_P(\theta) \tag{C.8-10}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 为反对称矩阵，满足 $\hat{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{T}} = \hat{\boldsymbol{\omega}}^{-1} = -\hat{\boldsymbol{\omega}}$。

式（C.8-10）是一个以θ（将角度换成时间）为变量的一阶线性微分方程，其解为

$$\boldsymbol{r}_P(\theta) = \boldsymbol{R}\boldsymbol{r}_P(0) = e^{\hat{\omega}\theta} \boldsymbol{r}_P(0) \tag{C.8-11}$$

式中，$\boldsymbol{r}_P(0)$ 为该点的初始位置，$e^{\hat{\omega}\theta}$ 为矩阵指数。

因此旋转矩阵

$$\boldsymbol{R} = e^{\theta\hat{\omega}} \tag{C.8-12}$$

对 $e^{\hat{\omega}\theta}$ 进行 Taylor 级数展开

$$e^{\hat{\omega}\theta} = 1 + \hat{\omega}\theta + \frac{(\hat{\omega}\theta)^2}{2!} + \frac{(\hat{\omega}\theta)^3}{3!} + \cdots\cdots \tag{C.8-13}$$

注意到反对称矩阵 $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 满足以下关系：

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}^2 = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{I}, \quad \hat{\boldsymbol{\omega}}^3 = -\hat{\boldsymbol{\omega}} \tag{C.8-14}$$

这样式（C.8-13）可以写成

$$e^{\theta\hat{\omega}} = \boldsymbol{I} + (\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\cdots)\hat{\boldsymbol{\omega}} + (\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \cdots\cdots)\hat{\boldsymbol{\omega}}^2 \tag{C.8-15}$$

因此，可以导出**罗德里格斯**（Rodrigues）公式

$$e^{\theta\hat{\omega}} = \boldsymbol{I} + \hat{\boldsymbol{\omega}}\sin\theta + \hat{\boldsymbol{\omega}}^2(1-\cos\theta) \tag{C.8-16}$$

另外，由旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的定义，可知 $\boldsymbol{R}$ 又具有如下结构：

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \tag{C.8-17}$$

下面构造相应的转轴和等效转角。首先将 Rodrigues 公式展开

$$\begin{aligned} e^{\theta\hat{\omega}} &= \boldsymbol{I} + \hat{\boldsymbol{\omega}}\sin\theta + \hat{\boldsymbol{\omega}}^2(1-\cos\theta) \\ &= \begin{bmatrix} \omega_1^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & \omega_1\omega_2(1-\cos\theta)-\omega_3\sin\theta & \omega_1\omega_3(1-\cos\theta)+\omega_2\sin\theta \\ \omega_1\omega_2(1-\cos\theta)+\omega_3\sin\theta & \omega_2^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & \omega_2\omega_3(1-\cos\theta)-\omega_1\sin\theta \\ \omega_1\omega_3(1-\cos\theta)-\omega_2\sin\theta & \omega_2\omega_3(1-\cos\theta)+\omega_1\sin\theta & \omega_3^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{C.8-18}$$

因此

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}) = r_{11} + r_{22} + r_{33} = 1 + 2\cos\theta \tag{C.8-19}$$

上式中θ确实有解的条件是：（1）$\boldsymbol{R}$ 的迹等于其特征值之和；（2）$\boldsymbol{R}$ 保持向量长度不变；

（3）$\det(\boldsymbol{R})=+1$；（4）$\boldsymbol{R}$ 的特征值的模为 1，并形成复共轭对，因此$1\le \mathrm{tr}(\boldsymbol{R})\le 3$，且

$$\theta=\cos^{-1}(\frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}}{2}) \qquad \text{（C.8-20）}$$

由于反三角函数的多值性，其值可选为$2\pi n\pm\theta$ 或$-\theta\pm 2\pi n$ 中的任何一个。再对 $\boldsymbol{R}$ 的非对角元素相减，得到

$$\begin{cases} r_{32}-r_{23}=2\omega_1\sin\theta \\ r_{13}-r_{31}=2\omega_2\sin\theta \\ r_{21}-r_{12}=2\omega_3\sin\theta \end{cases} \qquad \text{（C.8-21）}$$

当$\theta\neq 0$时，转轴

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2\sin\theta}\begin{pmatrix} r_{32}-r_{23} \\ r_{13}-r_{31} \\ r_{21}-r_{12} \end{pmatrix} \qquad \text{（C.8-22）}$$

这样就找到了固定转轴的位置和等效转角（图 C-e5）。

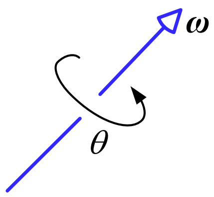


图 C-e5　旋转矩阵的等效转轴与转角

C.8.2　一般空间刚体运动与齐次变换矩阵

相对刚体转动的表达而言，描述一般的空间刚体运动要复杂得多。为了充分表达刚体运动，必须同时来描述刚体上任意一点的移动及刚体绕该点的转动。为此，通常在刚体上的某点处建立物体坐标系$\{B\}$，通过描述该坐标系相对于参考坐标系$\{A\}$的运动来表示刚体的位置和姿态。这样，刚体上各点的运动情况都可从物体坐标系的运动以及该点相对于物体坐标系的运动来得到（如图 C-e6 所示）。因此，

$${}^{A}\boldsymbol{r}_P=\boldsymbol{R}_{AB}\,{}^{B}\boldsymbol{r}_P+\boldsymbol{t}_{AB} \qquad \text{（C.8-23）}$$

式中，

${}^{A}\boldsymbol{r}_P$——点 P 在坐标系$\{A\}$中的坐标表示；

${}^{B}\boldsymbol{r}_P$——点 P 在坐标系$\{B\}$中的坐标表示；

$\boldsymbol{R}_{AB}$——坐标系$\{B\}$相对于坐标系$\{A\}$的旋转矩阵；

$\boldsymbol{t}_{AB}$——从坐标系$\{A\}$原点到坐标系$\{B\}$原点的位置向量（$\boldsymbol{r}_{O_BO_A}$）。

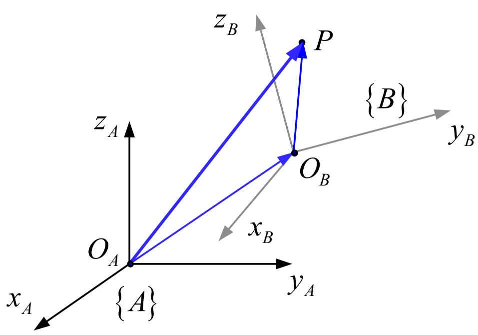


图 C-e6　一般刚体变换

变换成齐次坐标的表达形式

$$\begin{pmatrix} {}^A\boldsymbol{r}_P \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{AB} & \boldsymbol{t}_{AB} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} {}^B\boldsymbol{r}_P \\ 1 \end{pmatrix} \tag{C.8-24}$$

即

$${}^A\overline{\boldsymbol{r}}_P = \boldsymbol{T}_{AB}\,{}^B\overline{\boldsymbol{r}}_P \tag{C.8-25}$$

$${}^A\overline{\boldsymbol{r}}_P = \begin{pmatrix} {}^A\boldsymbol{r}_P \\ 1 \end{pmatrix},\quad {}^B\overline{\boldsymbol{r}}_P = \begin{pmatrix} {}^B\boldsymbol{r}_P \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{T}_{AB} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{AB} & \boldsymbol{t}_{AB} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \tag{C.8-26}$$

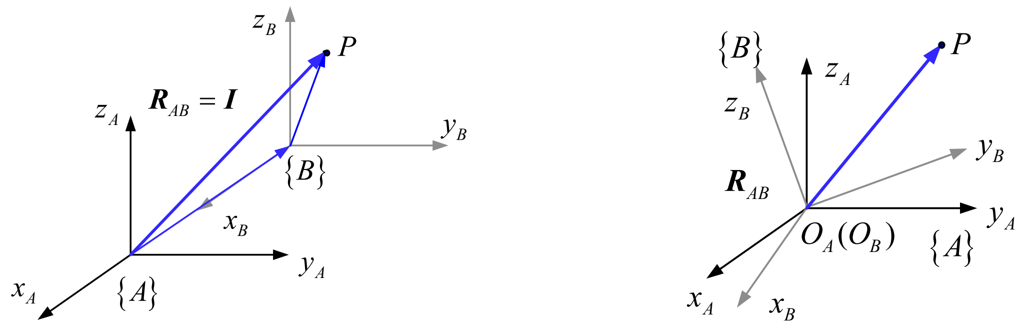
式中，

${}^A\overline{\boldsymbol{r}}_P$——点 P 在坐标系$\{A\}$中的齐次坐标表示；

${}^B\overline{\boldsymbol{r}}_P$——点 P 在坐标系$\{B\}$中的齐次坐标表示；

$\boldsymbol{T}$ ——刚体运动的齐次变换矩阵。

注意在刚体运动中存在的两种特例（如图 C-e7 所示）：（1）当$\boldsymbol{t}_{AB}=\boldsymbol{0}$时，就是纯转动的情况，前面对此已进行了详细讨论；（2）当$\boldsymbol{R}_{AB}=\boldsymbol{I}$时，表示纯移动的情况。空间刚体的单纯平移运动描述起来比较简单：首先选择刚体上任意一点（通常为物体坐标系的原点），描述该点相对于参考坐标系的位置坐标，从而获得整个刚体的运动轨迹。



a) 纯移动　　b) 纯转动

图 C-e7　刚体变换的两种特殊情况

【例 C-e1】：已知刚体绕 z 轴方向的轴线转动角度θ，且轴线经过点（0, l, 0），求物体坐标系$\{B\}$相对固定坐标系$\{A\}$的齐次变换矩阵（图 C-e8）。

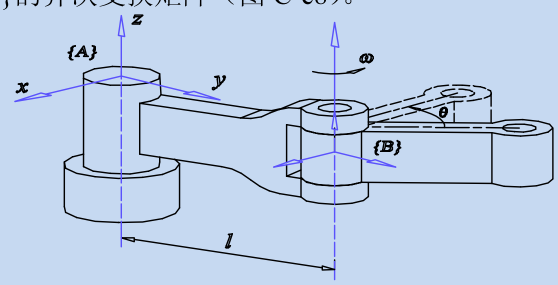


图 C-e8 例 C-e1 图

解：由式（C.8-25）直接得到物体坐标系$\{B\}$相对固定坐标系$\{A\}$的齐次变换矩阵。

$$\boldsymbol{T}_{AB} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{AB} & \boldsymbol{t}_{AB} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & l \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

类似刚体旋转变换，一般刚体运动除了可利用齐次变换矩阵表达外，还有更简单的表达形式。为此给出一个定理。

【Chasles 定理】 任意刚体运动都可以通过螺旋运动（即通过绕某轴的转动与沿该轴移动的复合运动）实现。螺旋运动的无限小量称为**运动旋量**（twist）。

如图 C-e9a 所示表示一个转动关节，设$\boldsymbol{\omega}$是表示其旋转轴方向的单位向量，$\boldsymbol{r}$ 为轴上任一点的向量。如果物体以单位角速度绕轴线$\boldsymbol{\omega}$作匀速转动，那么物体上一点 P 的速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_P$ 可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{r}}_P(t)=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}_P(\theta)-\boldsymbol{r}) \tag{C.8-27}$$

引入如下 4×4 矩阵 $\hat{\xi}$

$$\hat{\xi}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\omega}} & \boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{0} & 0\end{bmatrix} \tag{C.8-28}$$

式中，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega}$，则式（C.8-27）可写成

$$\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{r}}_P\\ 0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}\times & \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_P\\ 1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\omega}} & \boldsymbol{v}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_P\\ 1\end{pmatrix}=\hat{\xi}\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}_P\\ 1\end{pmatrix} \tag{C.8-29}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_P=\hat{\xi}\boldsymbol{r}_P \tag{C.8-30}$$

$$\boldsymbol{r}_P(\theta)=\boldsymbol{T}\boldsymbol{r}_P(0)=e^{\hat{\xi}\theta}\boldsymbol{r}_P(0) \tag{C.8-31}$$

$$\boldsymbol{T}=e^{\hat{\xi}\theta} \tag{C.8-32}$$

a) 一般刚体运动　　　b) 平移运动

图 C-e9　刚体运动

通过定义算子∨，可以将 4×4 矩阵 $\hat{\xi}$ 映射为一个 6 维向量 ξ，并将其定义为**运动旋量**。

$$\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\omega}} & \boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{0} & 0\end{bmatrix}^{\vee}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}，\text{或者}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\omega}} & \boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{0} & 0\end{bmatrix}^{\vee}=(\boldsymbol{\omega}\,;\boldsymbol{v}) \tag{C.8-33}$$

式中，$\xi=(\boldsymbol{\omega}\,;\boldsymbol{v})\in\mathbb{R}^6$ 定义为运动旋量 $\hat{\xi}$ 的坐标。

下面分如图 C-e10 所示的两种情况来计算刚体变换矩阵 $e^{\theta\hat{\xi}}$（推导过程忽略，具体参考文献[86]）。

a) 一般螺旋运动　　　b) 纯移动

图 C-e10　螺旋运动

（1）当$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0}$ 时，即刚体作平动时，有

$$\boldsymbol{T} = e^{\theta\hat{\xi}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \theta\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \tag{C.8-34}$$

（2）当 $\boldsymbol{\omega} \neq \boldsymbol{0}$ 时，

$$\boldsymbol{T} = e^{\theta\hat{\xi}} = \begin{bmatrix} e^{\theta\hat{\omega}} & (\boldsymbol{I} - e^{\theta\hat{\omega}})(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}) + \theta\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \tag{C.8-35}$$

下面再计算与螺旋运动相对应的刚体变换，先分析点 P 由起始坐标变换到最终坐标的运动，如图 C-e10a 所示。点 P 的最终坐标为

$$\boldsymbol{r}_P(\theta, h) = \boldsymbol{r} + e^{\theta\hat{s}}(\boldsymbol{r}_P(\boldsymbol{0}) - \boldsymbol{r}) + h\theta\boldsymbol{s} \quad \boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{0} \tag{C.8-36}$$

表示成齐次坐标的形式

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_P(\boldsymbol{0}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\theta\hat{s}} & (\boldsymbol{I} - e^{\theta\hat{s}})\boldsymbol{r} + h\theta\boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_P(\boldsymbol{0}) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{C.8-37}$$

因此

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} e^{\theta\hat{s}} & (\boldsymbol{I} - e^{\theta\hat{s}})\boldsymbol{r} + h\theta\boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{0} \tag{C.8-38}$$

注意式（C.8-38）所确定的刚体变换与式（C.8-33）表示的运动旋量的矩阵指数有相同的表达形式。如果取 $\boldsymbol{\omega} \equiv \boldsymbol{s}$， $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega} + h\boldsymbol{\omega}$， 式（C.8-38）即可转化为式（C.8-35）。这时，运动旋量的坐标 $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\omega}\ ;\ \boldsymbol{v})$ 即可以产生式（C.8-38）所示的螺旋运动。

特例：纯转动时，$h = 0$，这时，$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\omega}\ ;\ \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega})$；纯移动时，$h = \infty$，这时，$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{0}\ ;\ \boldsymbol{v})$。

【例 C-e2】：考察一个绕空间固定轴旋转的刚体运动（图 C-e11）。已知该运动的旋转轴方向 $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$，且经过点（0, l, 0），节距为 0。

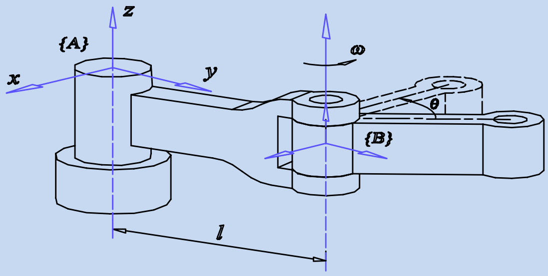


图 C-e11 例 C-e2 图

解：该刚体运动对应的运动旋量

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\omega}\,;\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\omega}) = (0, 0, 1\,; l, 0, 0)$$

因此对应的刚体变换矩阵

$$\boldsymbol{T} = e^{\theta\hat{\xi}} = \begin{bmatrix} e^{\theta\hat{\omega}} & (\boldsymbol{I} - e^{\theta\hat{\omega}})(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}) + \theta\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & l\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & l(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$